1. DYNAMIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

-Grandeurs cinétiques -

Elaboré par : Youssef RAHOU, septembre 2017

1. Introduction :

La statique du solide indéformable est une discipline de la mécanique qui a pour objet l'étude des **systèmes matériels au repos, donc à l'équilibre**. Les **efforts et moments** sont étudiés à travers **le Principe Fondamental de la Statique (P.F.S.)**, la notion de temps reste absente.
Alors que **La dynamique** du solide indéformable est une discipline de la mécanique qui étudie les **systèmes matériels en mouvement, ce mouvement est due aux actions mécaniques qui leurs sont appliquées.** Les causes (**efforts et moments) et les conséquences (grandeurs cinématiques ou plus correctement cinétiques*)** sont étudiées à travers **le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.)**, la notion de temps ainsi que la notion de masse sont présentes.

* On rappelle que la cinétique est la discipline de la mécanique qui s'intéresse à **la description du mouvement des systèmes matériels en prenant en compte leur masse, il s'agit donc de la cinématique en introduisant la notion de masse.**

En vue de formuler le **Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.), il faut :**

- **Décrire les grandeurs cinétiques (torseurs cinétique et dynamique et énergie cinétique) (chapitre 1).**
- **Décrire les grandeurs inertielles (moment et matrice d'inertie) (chapitre 2).**
- **Enoncer et maitriser l'utilisation du P.F.D. en utilisant les grandeurs précédemment décrites.**

L'objectif de ce présent chapitre est d'expliciter les grandeurs cinétiques mises en jeu dans la formulation du P.F.D., et ce, à travers :

- La description des notions préliminaires permettant d'établir la description complète des grandeurs cinétiques.
- La définition et la description explicite du **torseur cinétique**.
- La définition et la description explicite du **torseur dynamique**.
- Etablir **la relation entre torseur cinétique et torseur dynamique**.

2. Notions préliminaires :

2.1. Principe de conservation de la masse P.C.M. (admis) :

2.1.1. Définition :

Un ensemble matériel (E) (ensemble d'objets -solides, liquides ou gazeux- possédant une masse qui peuvent être liés ou non) **vérifie le principe de conservation de la masse, si tout sous-ensemble (e) de l'ensemble (E) a une masse constante au cours du temps :**

$\forall$ (e) $\subset$ (E), $\forall$ t, m(e)= constante.

2.1.2. Conséquence :

Pour Un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère R, pour tout champ de vecteurs $\vec{\varphi}(\mathrm{P},\mathrm{t})$ défini dans le temps en tout point P de (E), le P.C.M. permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_{P\in E}\vec{\varphi}(\mathrm{P},\mathrm{t})\,\mathrm{dm}\Big]_R=\int_{P\in E}\Big[\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(\mathrm{P},\mathrm{t})\Big]_R\,\mathrm{dm}$$

2.2. Centre de gravité ou d'inertie (rappel) :

Le centre de gravité ou d'inertie G d'un ensemble matériel (E) est défini par la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{m}.\int_{(E)}\overrightarrow{\mathrm{OP}}.\,\mathrm{dm}\ \text{ ou }\ \int_{(E)}\overrightarrow{\mathrm{GP}}.\,\mathrm{dm}=\vec{0}.$$

Où O est un point quelconque.

3. Notion de torseur cinétique :

3.1. Définition :

Le torseur cinétique d'un ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, **en un point O quelconque** :

$$\{C\,(E/R)\}=\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{P\in E}\vec{V}(\mathrm{P/R})\mathrm{dm}\\ \displaystyle\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}\wedge\vec{V}(\mathrm{P/R})\mathrm{dm}\end{array}\right\}_O$$

Remarques :

- La résultante générale du torseur cinétique {C(E/R)} est appelée **résultante cinétique ou quantité de mouvement.** (**Unité, M.L/T : kg.m/s).**

- Le moment résultant du torseur cinétique {C(E/R)} est appelée **moment cinétique, on le note au point O :** $\underset{O}{\vec{\sigma}}(\mathrm{E/R})$. (**Unité, M.L²/T : kg.m²/s).**
- La relation de changement de point du moment du torseur cinétique s'écrit :

$$\underset{B}{\vec{\sigma}}(\mathbf{E/R}) = \underset{A}{\vec{\sigma}}(\mathbf{E/R}). + \int_{P \in E} \vec{V}(\mathbf{P/R})\mathbf{dm} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Où A et B sont deux points quelconques de (E).

3.2. Expression simplifiée du torseur cinétique :

Par dérivation de la relation définissant la position du centre de gravité, on peut écrire :

$$\boldsymbol{m}.\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \int_{P \in E} \overrightarrow{\mathbf{OP}}.\mathbf{dm}$$

D'une part : $\left[\frac{d}{dt}\left(\int_{P \in E} \overrightarrow{\mathbf{OP}}.\mathbf{dm}\right)\right]_{\mathrm{R}} = \left[\left(\int_{P \in E}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{OP}}\right]_{\mathrm{R}}\mathbf{dm}\right)\right] = \int_{P \in E} \vec{V}(\mathbf{P/R}).\mathbf{dm}$

D'autre part : $\left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{m}.\overrightarrow{\mathbf{OG}})\right]_{\mathrm{R}} = \mathbf{m}.\vec{V}(\mathbf{G/R}).$

Ainsi :

$$\mathbf{m}.\vec{V}(\mathbf{G/R}) = \int_{P \in E} \vec{V}(\mathbf{P/R}).\mathbf{dm}$$

L'expression simplifiée du torseur cinétique d'un ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, **en un point O quelconque, s'écrit** :

$$\{C\ (\mathrm{E/R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{m}.\vec{V}(\mathbf{G/R}) \\ \underset{O}{\vec{\sigma}}(\mathrm{E/R}) = \int_{P \in E} \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} \wedge \vec{V}(\mathbf{P/R})\mathbf{dm} \end{array} \right\}_{O}$$

Remarque :

- La relation de changement de point du moment du torseur cinétique s'écrit **simplement** :

$$\underset{B}{\vec{\sigma}}(\mathbf{E/R}) = \underset{A}{\vec{\sigma}}(\mathbf{E/R}). + \mathbf{m}.\vec{V}(\mathbf{G/R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Où A et B sont deux points quelconques de l'ensemble matériel (E).

3.3. Torseur cinétique dans le cas d'une masse ponctuelle :

Si la masse de l'ensemble matériel (E) est supposée concentrée en son centre d'inertie G, alors <u>le torseur cinétique au point G</u> s'écrit :

$$\{C\ (\mathrm{E/R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{m}.\vec{V}(\mathbf{G/R}) \\ \underset{G}{\vec{\sigma}}(\mathbf{E/R}) = \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}_{G}$$

En effet (voir notes de cours) :

4. Notion de torseur dynamique :

4.1. Définition :

Le torseur dynamique d'un ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, **en un point O quelconque** :

$$\{\mathcal{D}\,(E/R)\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm \\ \int_{P \in E} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm \end{matrix} \right\}_O$$

Remarques :

- La résultante générale du torseur cinétique {D(E/R)} est appelée **résultante dynamique** (**Unité, M.L/T² : kg.m/s²).**
- Le moment résultant du torseur cinétique {C(E/R)} est appelée **moment dynamique, on le note au point O : $\vec{\delta}_O(E/R)$.** (**Unité, M.L²/T² : kg.m²/s²).**
- La relation de changement de point du moment du torseur dynamique s'écrit :

$$\vec{\delta}_B(E/R) = \vec{\delta}_A(E/R). + \int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm \wedge \overrightarrow{AB}$$

Où A et B sont deux points quelconques de (E).

4.2. Expression simplifiée du torseur dynamique :

La double dérivation de la relation définissant la position du centre de gravité, permet d'écrire :

$$m.\vec{V}(G/R) = \int_E \vec{V}(P/R).dm$$

Avec, d'une part : $\left[\frac{d}{dt}\left(\int_{P \in E} \vec{V}(P/R).dm\right)\right]_R = \left[\left(\int_{P \in E}\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]dm\right)\right]_R = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R).dm$

D'autre part : $\left[\frac{d}{dt}\left(m.\vec{V}(G/R)\right)\right]_R = m.\vec{\Gamma}(G/R).$

Ainsi :

$$m.\vec{\Gamma}(G/R) = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R).dm$$

L'expression simplifiée du torseur dynamique d'un ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, **en un point O quelconque, s'écrit** :

$$\{\mathcal{D}\,(E/R)\} = \left\{ \begin{matrix} m.\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_O(E/R) = \int_{P \in E} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm \end{matrix} \right\}_O$$

Remarque :

- La relation de changement de point du moment du torseur cinétique s'écrit **simplement** :

$$\vec{\delta}_B(E/R) = \vec{\delta}_A(E/R) + m.\vec{\Gamma}(G/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Où A et B sont deux points quelconques de (E).

- Dans le cas où l'ensemble matériel (E) est constitué de n solides (S1), (S2), …, (Sn), le moment dynamique en un point O quelconque de (E) s'écrit :

$$\vec{\delta}_O(E/R) = \int_{P \in E = S1 \cup S2 \cup \ldots \cup Sn} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm = \int_{P \in S1} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm + \int_{P \in S2} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm + \ldots + \int_{P \in Sn} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$$
$$= \vec{\delta}_O(S1/R) + \vec{\delta}_O(S2/R) + \ldots + \vec{\delta}_O(Sn/R)$$

Ainsi :

$$\vec{\delta}_O(E = S1 \cup S2 \cup \ldots \cup Sn/R) = \vec{\delta}_O(S1/R) + \vec{\delta}_O(S2/R) + \ldots + \vec{\delta}_O(Sn/R)$$

4.3. Torseur dynamique dans le cas d'une masse ponctuelle :

Si la masse de l'ensemble matériel (E) est supposée concentrée en son centre d'inertie G, alors le torseur dynamique au point G s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(E/R)\} = {}_G\left\{\begin{matrix} m.\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_G(E/R) = \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

En effet (voir notes de cours) :

5. Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique :

5.1. Relation entre résultante cinétique et résultante dynamique :

On rappelle que la résultante du torseur cinétique s'exprime par :

$$\int_{P \in E} \vec{V}(P/R)dm = m.\vec{V}(G/R)$$

De même, la résultante du torseur dynamique, s'exprime par :

$$\int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm = m.\vec{\Gamma}(G/R)$$

Ainsi la résultante dynamique représente la dérivée temporelle de la résultante cinétique.

5.2. Relation entre moment cinétique et moment dynamique :

5.2.1. Relation générale :

Par analogie, cherchons une relation entre le moment dynamique et la dérivée par rapport au temps du moment cinétique.

Par définition, le moment cinétique d'un ensemble matériel (E**)** dans son mouvement par rapport au repère R **en un point A quelconque** s'écrit :

$$\vec{\sigma}_A(\mathrm{E/R}) = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm}$$

Sa dérivée temporelle s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\mathrm{dm}\Big]_R = \int_{P \in E} \Big[\frac{d}{dt}\big(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\big)\Big]_R \mathrm{dm} = \underbrace{\int_{P \in E} \Big[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\Big]_R \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm}}_{\boxed{\text{Première intégrale}}} + \underbrace{\int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \Big[\frac{d}{dt}\vec{V}(\mathrm{P/R})\Big]_R \mathrm{dm}}_{\boxed{\text{Deuxième intégrale}}}$$

- Pour simplifier la première intégrale, faisons apparaitre un vecteur constant en introduisant le point O, origine du repère R : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}$**, ainsi :**

$$\begin{aligned}
\int_{P \in E} \Big[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\Big]_R \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm} &= \int_{P \in E} \Big(\Big[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AO}\Big]_R + \Big[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\Big]_R\Big) \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm}\\
&= \int_{P \in E} \Big[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AO}\Big]_R \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm} + \int \Big[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\Big]_R \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm}\\
&= \int_{P \in E} -\vec{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm} + \int_{P \in E} \vec{V}(\mathrm{P/R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm}\\
&= -\vec{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \int_{P \in E} \vec{V}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm}\\
&= -\vec{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \mathrm{m}.\vec{V}(\mathrm{G/R})
\end{aligned}$$

- La deuxième intégrale se calcule plus simplement :

$$\int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \Big[\frac{d}{dt}\vec{V}(\mathrm{P/R})\Big]_R \mathrm{dm} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{dm} = \vec{\delta}_A(\mathrm{E/R})$$

Il vient donc :

$$\Big[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(\mathrm{E/R})\Big]_R = -\vec{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \mathrm{m}.\vec{V}(\mathrm{G/R}) + \vec{\delta}_A(\mathrm{E/R})$$

Ainsi, le moment dynamique est lié à la dérivée du moment cinétique par la relation :

$$\vec{\delta}_A(\mathrm{E/R}) = \Big[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(\mathrm{E/R})\Big]_R + \mathrm{m}.\vec{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{G/R})$$

Où **A est un point quelconque**.

5.2.2. **Deux cas remarquables :**

La relation entre moment dynamique et moment cinétique se simplifie si :

- **A est un point fixe dans le repère R**, dans ce cas :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R$$

- **A est confondu avec le centre d'inertie G de (E) (A=G)**, dans ce cas :

$$\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(E/R)\right]_R$$

Ainsi **le moment dynamique représente la dérivée du moment cinétique** si **le point A est fixe dans R ou s'il est confondu avec G**.

6. La notion d'énergie cinétique :

L'énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R est la grandeur **scalaire positive** :

$$E_C(E/R) = \frac{1}{2}.\int_{P \in E} [\vec{V}(P/R)]^2 \, dm$$

Unité ($M.L^2/T^2$: $kg.m^2/s^2$=joule).

Remarque :

- Dans le cas où **l'ensemble matériel (E) est constitué de n solides** (S1), (S2), …, (Sn), l'énergie cinétique de (E) s'écrit :

$$E_C(E/R) = \frac{1}{2}.\int_{P \in E = S1 \cup S2 \cup \ldots \cup Sn} [\vec{V}(P/R)]^2 \, dm = \frac{1}{2}.\int_{P \in S1} [\vec{V}(P/R)]^2 \, dm + \frac{1}{2}.\int_{P \in S2} [\vec{V}(P/R)]^2 \, dm + \cdots + \frac{1}{2}.\int_{P \in Sn} [\vec{V}(P/R)]^2 \, dm$$

$$= E_C(S1/R) + E_C(S2/R) + \ldots + E_C(S1n/R).$$

Ainsi :

$$E_C(\mathbf{E = S1 \cup S2 \cup \ldots \cup Sn}/R) = E_C(S1/R) + E_C(S2/R) + \ldots + E_C(Sn/R)$$